

Tartalomjegyzék

1. Határozatlan integrál	1
1.1. Polinomok integrálása és egyéb elemi integrálok	1
1.2. $\int \frac{f'}{f}$	1
1.3. $\int f' f^n$	2
1.4. Parciális integrálás	3
1.5. Trigonometrikus integrálok linearizálással	4
1.6. arctg-re visszavezethető integrálok	4
1.7. Parciális törtekre bontás	5
1.8. Helyettesítéssel integrálás	6
2. A határozott integrál geometriai alkalmazásai	7

1. Határozatlan integrál

1.1. Polinomok integrálása és egyéb elemi integrálok

Emlékeztető:

- $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, k \neq -1$
- $\int x^{-1} dx = \ln(x) + c$
- $\int a f(x) + b g(x) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx, a, b \in \mathbb{R}$

Például:

- $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$
- $\int 3x^3 - 4x + 5 dx = 3 \frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^2}{2} + 5x + c$
- $\int \frac{5x^2 + 7x + 3}{\sqrt[3]{x}} dx = \int 5x^{\frac{5}{3}} dx + \int 7x^{\frac{2}{3}} dx + \int 3x^{-\frac{1}{3}} dx = 5 \frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} + 7 \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + 3 \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + c$

Bónusz:

- $\int 5 \sin(x) + 7 \cos(x) dx = -5 \cos(x) + 7 \sin(x) + c$
- $\int 2^{x-3} dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8 \ln(2)} \int \ln(2) \cdot 2^x dx = \frac{1}{8 \ln(2)} 2^x$

1.2. $\int \frac{f'}{f}$

Emlékeztető: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$

Ennek speciális esete, amit már láttunk, $f(x) = x$, ekkor $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$.

Például:

1. $\int \frac{3x^2}{4+x^3} dx$:

$$f(x) = x^3 + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

Vagyis:

$$\int \frac{3x^2}{4+x^3} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c = \ln |4+x^3| + c$$

2. $\int \frac{x}{2x^2+5} dx$:

$$f(x) = 2x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = 4x$$

Vagyis:

$$\int \frac{x}{2x^2+5} dx = \frac{1}{4} \int 4 \frac{x}{2x^2+5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{4} \ln |f(x)| + c = \frac{1}{4} \ln |2x^2 + 5| + c$$

3. $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx$: $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

Vagyis:

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c = \ln |\ln(x)| + c$$

4. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx$:

$$f(x) = e^{2x} + 1 \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x}$$

Vagyis:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx &= \frac{1}{2} \int 2 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2} \ln |f(x)| + c = \frac{1}{2} \ln |e^{2x} + 1| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + c \end{aligned}$$

1.3. $\int f' f^n$

Emlékeztető: $\int f'(x) f^n(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$

Megj: Ennek speciális esete, amikor $f(x) = x$, ekkor $\int x^n 1 dx = \int f(x) f'(x) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$.
Például:

1. $\int \sin^8(x) \cos(x) dx$

$$f(x) = \sin(x), n = 8, \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

Vagyis:

$$\int \sin^8(x) \cos(x) dx = \int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c = \frac{\sin^9(x)}{9} + c$$

2. $\int x \sqrt{3+2x^2} dx$

$$f(x) = 3 + 2x^2, n = \frac{1}{2}, \Rightarrow f'(x) = 4x$$

Vagyis:

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{3+2x^2} dx &= \frac{1}{4} \int 4x \sqrt{3+2x^2} dx = \frac{1}{4} \int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c \\ &= \frac{(3+2x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{(x^2+3)^3} \end{aligned}$$

3. $\int \frac{1}{x \ln^4(x)} dx$

$$f(x) = \ln(x), n = -4, \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

Vagyis:

$$\int \frac{1}{x \ln^4(x)} dx = \int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c = -\frac{\ln^{-3}(x)}{3} + c = -\frac{1}{3 \ln^3(x)}$$

4. $\int \cosh^5(2x) \sinh(2x) dx$

$$f(x) = \cosh(2x), n = 5, \Rightarrow f'(x) = 2 \sinh(2x)$$

Vagyis:

$$\int \cosh^5(2x) \sinh(2x) dx = \frac{1}{2} \int 2 f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c = \frac{1}{2} \frac{\cosh^6(x)}{6} + c$$

1.4. Parciális integrálás

Emlékeztető: $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$

Pl:

- A polinom fokát csökkentjük

$$\int c \cdot \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^x \\ \cosh(x), \sinh(x) \\ \operatorname{tg}(x), \cos(x), \sin(x) \end{array} \right\} dx$$

Ekkor a bevált trükk, hogy a polinomot választjuk $u(x)$ -nek és a másik függvényt $v'(x)$ -nek, lásd alább.

Például:

1. $\int x \cos(x) dx$

$$\int \underset{u'=1}{x} \underset{v=\sin(x)}{\cos(x)} dx = x \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + c$$

2. $\int (2x^2 + 3x - 5)e^x dx$ Ebben az esetben $2x$ kell maj parciálisan integrálnunk.

$$\begin{aligned} \int \underset{u_1=4x+3}{(2x^2+3x-5)} \underset{v_1=e^x}{e^x} dx &= (2x^2+3x-5)e^x - \int \underset{u_2=4}{(4x+3)} \underset{v_2=e^x}{e^x} dx \\ &= (2x^2+3x-5)e^x - \left((4x+3)e^x - \int 4e^x dx \right) = (2x^2+3x-5)e^x - (4x+3)e^x + 4e^x + c \end{aligned}$$

3. $\int x^2 \cosh(x) dx$

$$\begin{aligned} \int \underset{u_1=2x}{x^2} \underset{v_1=\sinh(x)}{\cosh(x)} dx &= x^2 \sinh(x) - \int \underset{u_2=2}{2x} \underset{v_2=\cosh(x)}{\sinh(x)} dx \\ &= x^2 \sinh(x) - \left(2x \cosh(x) - \int 2 \cosh(x) dx \right) = x^2 \sinh(x) - 2x \cosh(x) + 2 \sinh(x) + c \end{aligned}$$

- Logaritmus.

1. $\int x^k \ln(x) dx, k \neq -1$

$$\begin{aligned} \int \underset{u_1=\frac{1}{x}}{\ln(x)} \underset{v_1=\frac{x^{k+1}}{k+1}}{x^k} dx &= \ln(x) \frac{x^{k+1}}{k+1} - \int \frac{1}{x} \frac{x^{k+1}}{k+1} dx = \ln(x) \frac{x^{k+1}}{k+1} - \int \frac{x^k}{k+1} dx \\ &= \ln(x) \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + c \end{aligned}$$

spec. megkapjuk az $\ln(x)$ integrálját, hogyha $k = 0$. (az egyet választani egyébként is jó trükk néha, lásd később.)

- Szorzás 1-gyel.

1. $\int \operatorname{arctg}(x) dx$

$$\int \operatorname{arctg}(x) \frac{1}{u_1} dx = \operatorname{arctg}(x)x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x)x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c$$

Az utolsó lépéshez lásd a 1.2. fejezetet. Hasonlóan számolhatóak például az inverze trigonometrikus és hiperbolikus függvények integráljai pl. $\int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$, stb. illetve az $\ln(x)$ integrálja (lásd fentebb).

- "Körkörös" integrál (exponenciális · trigonometrikus v. hiperbolikus).

1. $\int e^x \cos(x) dx$

$$\begin{aligned} \int \cos(x) \frac{e^x}{u_1} dx &= e^x \cos(x) + \int \sin(x) \frac{e^x}{u_2} dx \\ u_1' &= -\sin(x) \quad u_2' = \cos(x) \end{aligned}$$

$$= e^x \cos(x) + e^x \sin x - \int e^x \cos(x) dx$$

Mivel mindkét oldalon előbukkan a keresett integrál, a fentit átrendezve kapjuk, hogy

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\cos(x) + \sin(x)) \text{ vagyis } \int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\cos(x) + \sin(x))}{2} + c.$$

1.5. Trigonometrikus integrálok linearizálással

1. $\int \sin^2(x) dx$

Felhasználva, hogy

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

kapjuk, hogy

$$\int \sin^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) dx = \frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4} + c.$$

2. $\int \sin^3(x) dx$

Felhasználva, hogy $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, és, hogy $\cos'(x) = -\sin(x)$ és a 1.3 fejezetben tanultakat kapjuk, hogy

$$\int \sin^3(x) dx = \int (1 - \cos^2(x))(\sin(x)) dx = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + c.$$

3. $\int \sin(x) \sin(2x) dx$

Felhasználva, hogy $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ és a 1.3 fejezetben tanultakat kapjuk, hogy

$$\int \sin(x) \sin(2x) dx = 2 \int \sin^2(x) \cos(x) dx = 2 \frac{\sin^3(x)}{3} + c.$$

1.6. arctg-re visszavezethető integrálok

Emlékeztető: $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$

1. $\int \frac{1}{1+4x^2} dx$

$$(\operatorname{arctg}(bx))' = \frac{1}{1+(bx)^2} \cdot b$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{2} \int 2 \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x) + c$$

$$2. \int \frac{1}{9+4x^2} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{9+4x^2} dx &= \frac{1}{9} \int \frac{1}{1+\frac{4}{9}x^2} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{1+(\frac{2}{3}x)^2} dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} \int \frac{1}{1+(\frac{2}{3}x)^2} dx \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{3} \right) + c \end{aligned}$$

$$3. \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{1+x^2+2x+1} dx = \int \frac{1}{1+(x+1)^2} dx = \operatorname{arctg}(x+1) + c$$

$$4. \int \frac{1}{4x^2-4x+5} dx$$

$$\int \frac{1}{4x^2-4x+5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+x^2-x+1+\frac{1}{4}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+(x-\frac{1}{2})^2} dx = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left(x - \frac{1}{2} \right) + c$$

1.7. Parciális törtekre bontás

$$1. \int \frac{1}{x^2-1} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = *$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx-B}{(x+1)(x-1)}$$

$$Ax+Bx+A-B=1 \text{ vagyis } A+B=0 \text{ és } A-B=1, \text{ tehát } B=-\frac{1}{2}, A=\frac{1}{2}$$

$$* = \int \frac{1}{2(x-1)} dx - \int \frac{1}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} (\ln|x-1| - \ln|x+1|) + c$$

$$2. \int \frac{1}{2x^2+3x-5} dx$$

$$\int \frac{1}{2x^2+3x-5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-1)(x+\frac{5}{2})} dx = *$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{Ax+\frac{5}{2}A+Bx-B}{(x+1)(x-1)}$$

$$A+B=0 \text{ és } \frac{5}{2}A-B=1, \text{ tehát } B=-\frac{2}{7}, A=\frac{2}{7}$$

$$* = \int \frac{1}{7(x-1)} dx - \int \frac{1}{7(x+\frac{5}{2})} dx = \frac{1}{7} (\ln|x-1| - \ln|x+\frac{5}{2}|) + c$$

$$3. \int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x} dx$$

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x} dx = \int \frac{x+2}{x(x-1)^2} dx = *$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{Ax^2-2Ax+A+Bx^2-Bx+Cx}{(x-1)^2x} =$$

$$x^2 : A + B = 0$$

$$x : -2A - B + C = 1$$

$$\text{const} : A = 2$$

$$\text{így } A = 2, C = 3 \text{ és } B = -2$$

$$* = \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx = 2 \ln |x| - 2 \ln |x-1| + \frac{3}{x-1} + c$$

$$4. \int \frac{1}{x^3+x} dx$$

$$\int \frac{1}{x^3+x} dx = \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx = *$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{(x^2+1)x}$$

$$x^2 : A + B = 0$$

$$x : C = 0$$

$$\text{const} : A = 1$$

$$\text{így } A = 1, C = 0 \text{ és } B = -1$$

$$* = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \ln |x| - \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + c$$

$$5. \int \frac{x^2+3x-3}{x-1} dx \text{ Ha elosztjuk } x^2+3x-3\text{-t } x-1\text{-gyel az eredmény } (x+4) \text{ a maradék pedig } 1, \text{ vagyis:}$$

$$\int \frac{x^2+3x-3}{x-1} dx = \int \frac{x+4}{x-1} \frac{1}{x-1} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + \ln |x-1| + c$$

1.8. Helyettesítéssel integrálás

$$\text{Emlékeztető: } \int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

Példák:

$$1. \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$$

A helyettesítés:

$$t = \sqrt{x}$$

$$x = g(t) = t^2$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

Tehát

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{2t}{1+t} dt = 2 \int \frac{1+t}{1+t} dt - 2 \int \frac{1}{1+t} dt = 2t - 2 \ln |1+t| + c = 2(\sqrt{x} - \ln |1+\sqrt{x}|) + \hat{c}$$

$$2. \int e^{\sqrt[3]{x+2}} dx$$

A helyettesítés:

$$t = \sqrt[3]{x+2}$$

$$x = g(t) = t^3 - 2$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t$$

Tehát 2 parciális deriválással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt[3]{x+2}} dx &= 3 \int e^t t^2 dt = 3e^t t^2 - 6 \int e^t t dt = 3e^t t^2 - 6te^t + 6 \int e^t dt = 3e^t(t^2 - 2t + 2) + c \\ &= 3e^{\sqrt[3]{x+2}}(\sqrt[3]{x+2}^2 - 2\sqrt[3]{x+2} + 2) + \tilde{c}.\end{aligned}$$

3. $\int e^t \sin(e^t) dt$ $f(x) = \sin(x)$, $g(t) = e^t$, $g'(t) = e^t$, $x = g(t)$

$$\int e^t \sin e^t dt = \int g'(t) f(g(t)) dt = \int f(x) dx = \int \sin(x) dx = \cos(x) + c = \cos(e^t) + \tilde{c}$$

Trükkösebbek:

4. $\int \sqrt{1-x^2} dx$

$$x = \sin(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos(t)$$

$$t = \arcsin(x)$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int \cos^2(t) dt = \int \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt \\ &= \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} + c = \frac{2 \sin(t) \cos(t)}{4} + \frac{t}{2} + c = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin(x) + \tilde{c}\end{aligned}$$

5. $\int x^2 \sqrt{x^2+1} dx$

$$x = \sinh(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \cosh(t)$$

$$t = \operatorname{arsh}(x)$$

A hiperbolikus függvényekre vonatkozó azonosságokból:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sqrt{1+x^2} dx &= \int \sqrt{1+\sinh^2(t)} \sinh^2(t) \cosh(t) dt = \int (\sinh(t) \cosh(t))^2 dt = \int \left(\frac{\sinh(2t)}{2}\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{\cosh(4t) - 1}{2} dt = \frac{1}{32} (\sinh(4t) - 4t) + c = \frac{1}{32} (2 \sinh(2t) \cosh(2t) - 4t) + c \\ &= \frac{1}{32} (4 \sinh(t) \cosh(t) (\cosh^2(t) + \sinh^2(t)) - 4t) + c = \frac{1}{8} (x \sqrt{1+x^2} (2x^2 + 1) - \operatorname{arsh}(x)) + c\end{aligned}$$

2. A határozott integrál geometriai alkalmazásai

1. Görbék közti terület

Számoljuk ki az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = x + 2$ függvények közti terület nagyságát. (Lásd a piros területet a 1 ábrán)

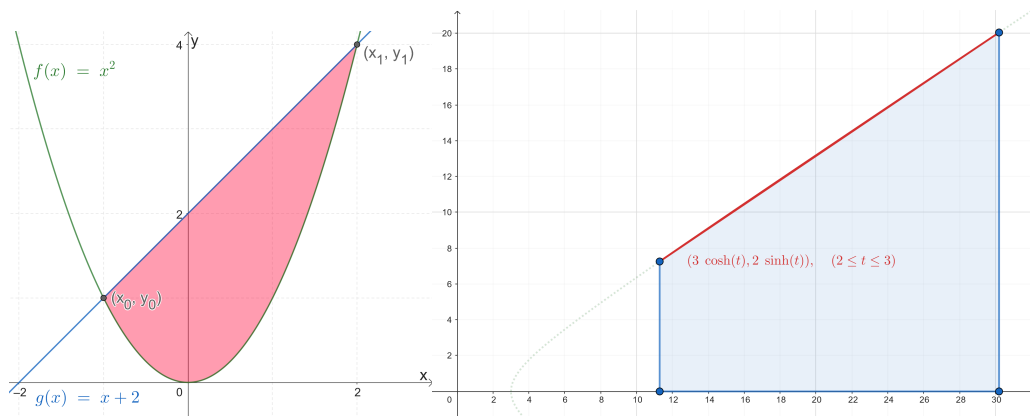
1.lépés: Számoljuk ki, hogy a két görbe milyen x_0, x_1 pontban metszi egymást (mely pontokban egyezik meg függvény érték). 2. lépés: Számoljuk ki a nagyobb és a kisebb különbségének integrálját x_0 és x_1 közt.

Vagyis: 1.lépés:

$$x^2 = x + 2 \iff x^2 - x - 2 = 0 \implies x_0 = -1, x_1 = 2$$

2.lépés:

$$\int_{-1}^2 x + 2 - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$



1. ábra. Görbék közti és paraméteresen adott görbe alatti terület.

2. Görbék alatti terület

Adjuk meg az $x(t) = 3 \cosh(t)$ $y(t) = 2 \sinh(t)$ paraméteresen adott görbe alatti T területét a $t \in [2, 3]$ intervallumon. (Lásd a 1 ábrát)

$$T = \int_2^3 y(t) \dot{x}(t) dt = \int_2^3 2 \sinh(t) 3 \cosh(t) dt = \int_2^3 6 \sinh^2(t) dt = 3 \int_2^3 \frac{2 \cosh(2t) - 2}{2} dt = \frac{3}{2} [\sinh(2t) - 2t] = \frac{3}{2} (\sinh(6t) - 4t)$$

3. Ívhossz

4. Forgástest térfogata